

Равносильность и посторонние корни

Что можно делать с уравнением и почему

Что значит «равносильные уравнения»

Равносильные уравнения имеют одно и то же множество решений.

Иррациональное уравнение содержит неизвестное под знаком корня.

$$\sqrt{x+2} = x \quad \text{— пример}$$

$$2x = 6 \iff x = 3$$



Знак $\iff$ означает: преобразование обратимо, корни те же.

Знак $\Rightarrow$ означает: получили следствие; могли появиться лишние корни.

Теоремы 14.1-14.2. Прибавление и умножение

Прибавление одного и того же числа к обеим частям сохраняет корни.

Умножение или деление обеих частей на одно и то же ненулевое число тоже даёт равносильное уравнение.

$$x - 4 = 7 \iff x = 11$$

$$3x = 12 \iff x = 4$$



Обе операции обратимы: можно вычесть число или разделить на него.

Умножать на выражение с x без анализа его нулей опасно.

Теорема 14.4. Чётная степень даёт следствие

Уравнение-следствие содержит все корни исходного уравнения.

При чётной степени получаем следствие: могут добавиться новые корни.

Причина: равные чётные степени бывают у разных чисел.

$$A = B \Rightarrow A^{2k} = B^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$



Корень -3 появился после возведения в квадрат: он посторонний.

Нечётная степень сохраняет равносильность для действительных чисел.

Три теоремы для уравнений с корнями

Учитываем область определения и знак корня

Теорема 14.5. Корень равен корню

Чтобы квадратные корни были равны, их подкоренные выражения должны быть равны и неотрицательны. При их равенстве достаточно потребовать неотрицательность одного из них.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$



Пример: $\sqrt{x+1} = \sqrt{5-x} \rightarrow x+1 = 5-x \rightarrow x=2$.

При $x=2$ подкоренные выражения равны $3 \geq 0$. Корень подходит.

Теорема 14.6. Корень равен выражению

Квадратный корень неотрицателен, поэтому правая часть тоже ≥ 0 .

После возведения в квадрат сохраняем это условие.

Из $f(x) = g^2(x)$ автоматически следует $f(x) \geq 0$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$



Правая часть отрицательна $\rightarrow$ равенство с квадратным корнем невозможно.

Например, $\sqrt{x+1} = -2$ не имеет решений.

Теорема 14.7. Когда квадрат безопасен

Если на рассматриваемом множестве обе части неотрицательны, то возведение в чётную степень даёт равносильное уравнение.

На неотрицательных числах разные числа имеют разные квадраты.

$$A \geq 0, B \geq 0: A = B \iff A^{2k} = B^{2k}$$

$$\sqrt{x+1} = 2 \iff x+1 = 4 \Rightarrow x=3$$



Здесь квадратный корень ≥ 0 и число $2 > 0$ — квадрат не добавляет корней.

Проверка: $\sqrt{3+1} = 2$.

Алгоритм решения

Один корень: от ограничений до ответа

Шесть шагов решения

1. Запиши ОДЗ: подкоренные выражения чётных корней ≥ 0 .
2. Оставь один корень отдельно от остальных выражений.
3. Перед квадратом учти знак другой части.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow g(x) \geq 0$$



4. Возведи в квадрат. 5. Реши и отбери по ограничениям.

6. Проверь кандидатов в исходном уравнении и запиши ответ.

Пример. Решим $\sqrt{x+2} = x$

ОДЗ: $x \geq -2$. Корень неотрицателен, значит $x \geq 0$.

При этом ограничении квадрат обеих частей — равносильный шаг.

$$x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ или } x = -1$$



Отбор: $2 \geq 0$ подходит; $-1 < 0$ не подходит.

Не всякий корень полученного квадратного уравнения — ответ.

Проверка и ответ

Подставляем найденные значения именно в исходное уравнение.

Проверять только равенство после квадрата недостаточно.

$$x = 2: \sqrt{2+2} = 2 \quad \checkmark$$

$$x = -1: \sqrt{-1+2} = 1 \neq -1$$



Ответ: $x = 2$. Число -1 — посторонний корень.

ОДЗ недостаточно: -1 входит в ОДЗ, но не решает уравнение.

Два корня: два возведения в квадрат

Пример: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$

Шаг 1. ОДЗ и первый квадрат

ОДЗ: $x+1 \geq 0$ и $x-2 \geq 0$, то есть $x \geq 2$.

Обе части неотрицательны. Возводим в квадрат.

При квадрате суммы обязательно появляется удвоенное произведение.

$$2x - 1 + 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 9$$

$$\sqrt{(x+1)(x-2)} = 5 - x$$



Использовали $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат суммы корней не равен сумме подкоренных выражений.

Шаг 2. Новое ограничение и второй квадрат

Левая часть ≥ 0 , значит $5 - x \geq 0$, то есть $x \leq 5$.

Вместе с ОДЗ получаем $2 \leq x \leq 5$.

На этом промежутке снова можно равносильно возвести в квадрат.

$$(x+1)(x-2) = (5-x)^2$$

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow 9x = 27$$



Получили $x = 3$. Оно входит в промежуток $[2; 5]$.

Новое ограничение записываем перед каждым новым квадратом.

Шаг 3. Проверка в исходном уравнении

Подставим $x = 3$. Вычисляем оба квадратных корня отдельно.

Если равенство верно, найденное число — корень уравнения.

$$\sqrt{3+1} + \sqrt{3-2} = \sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$$

Ответ: $x = 3$



Проверка завершена: левая часть равна правой.

Все ограничения соблюдены: $3 \geq 2$ и $3 \leq 5$.

Разбор примера из ваших материалов

$$\sqrt{2x - 5} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{2x + 1}$$

Шаг 1. Область определения и первый квадрат

Для трёх корней нужно: $2x - 5 \geq 0$, $x + 2 \geq 0$, $2x + 1 \geq 0$.

Их пересечение: $x \geq 5/2$. На ОДЗ обе части ≥ 0 .

Возводим в квадрат и собираем слагаемые.

$$3x - 3 + 2\sqrt{(2x - 5)(x + 2)} = 2x + 1$$

$$2\sqrt{(2x - 5)(x + 2)} = 4 - x$$



Первый квадрат равносильен исходному уравнению на ОДЗ.

Не теряем произведение корней при квадрате суммы.

Шаг 2. Знак правой части и второй квадрат

Левая часть ≥ 0 , значит $4 - x \geq 0$. Итак, $5/2 \leq x \leq 4$.

На этом промежутке возводим обе части в квадрат.

$$4(2x - 5)(x + 2) = (4 - x)^2$$

$$8x^2 - 4x - 40 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 7x^2 + 4x - 56 = 0$$



Ограничение $x \leq 4$ — обязательная часть равносильного перехода.

Затем решаем обычное квадратное уравнение.

Шаг 3. Решаем и отбираем

Дискриминант: $D = 4^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-56) = 1584 = 144 \cdot 11$.

Меньший корень отрицателен, поэтому не входит в $[5/2; 4]$.

Большой корень $\approx 2,557$: он удовлетворяет обоим ограничениям.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6\sqrt{11}}{7}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$$



Все переходы были равносильны с учётом записанных ограничений.

Поэтому выбранный корень решает и исходное уравнение.