

Корни высших степеней

Смысл корня и корень из степени

1. Что означает корень n-й степени

Степень корня n — натуральное число, $n \geq 2$.

Корень — число, n -я степень которого равна подкоренному числу.

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad (3^4 = 81) \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$



При чётном n : $a \geq 0$, берём неотрицательный корень $b \geq 0$.

При нечётном n : a может быть любым; знак корня — как у a .

2. Нечётная степень корня: знак сохраняется

Нечётный корень из нечётной степени возвращает исходное число.

Условие: a — любое действительное число; $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$$

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5 \quad \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$$



Нечётная степень не теряет знак числа.

Например, $(-5)^3 = -125$ и кубический корень из -125 равен -5 .

3. Чётная степень корня: нужен модуль

Чётная степень превращает и a , и $-a$ в одно и то же число.

Чётный корень неотрицателен: при $a < 0$ получаем $-a$, а не a .

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7 \quad \sqrt[4]{x^4} = |x|$$



Модуль обязателен, если знак a неизвестен.

Для $a \geq 0$ модуль равен a ; для $a < 0$ модуль равен $-a$.

Действия с корнями

Формулы работают при указанных условиях

4. Корень из произведения

При $a \geq 0$, $b \geq 0$ и натуральном $n \geq 2$ корень можно распределить между множителями. В обратную сторону корни объединяем.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$$



Выносим из-под корня множитель, являющийся полной n -й степенью.

Для нечётной степени корня правило верно и при отрицательных a , b .

5. Корень из частного

Условия общей формулы: $a \geq 0$, $b > 0$, натуральное $n \geq 2$.

Корень из дроби — частное корней числителя и знаменателя.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$$



Знаменатель не может равняться нулю.

Если $a \leq 0$ и $b < 0$: сначала заменяем a/b на $(-a)/(-b)$.

6. Степень корня

Условия: $a \geq 0$; $n \geq 2$ и $m \geq 1$ — натуральные числа.

Возвести корень в степень можно, возведя в неё подкоренное число.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(\sqrt[3]{4})^3 = 4 \quad (\sqrt[4]{9})^2 = 3$$



Если степень снаружи совпала со степенью корня, остаётся a .

Для нечётной степени корня формула верна и при $a < 0$.

Корни и дробные степени

Вложенные корни и преобразование записи

7. Корень из корня

Условия: $a \geq 0$; n и k — натуральные числа, $n \geq 2$, $k \geq 2$.

При объединении вложенных корней степени корней перемножаем.

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$



Проверка: кубический корень из 64 равен 4, а корень из 4 равен 2.

Степени корней перемножаем, не складываем.

8. Одинаковый множитель можно сократить

При $a \geq 0$, натуральных $n \geq 2$ и $k \geq 1$ можно сократить

общий множитель степени корня и показателя подкоренной степени.

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2}$$



В обратную сторону: приводим радикалы к общей степени корня.

Условие $a \geq 0$ важно: например, корень из $(-2)^2$ равен 2.

9. Степень с рациональным показателем

При $a > 0$, целом m и натуральном $n \geq 2$ дробную степень

можно записать корнем: знаменатель показателя — степень корня.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$16^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8 \quad 27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$



Отрицательный показатель: сначала берём обратное число.

Для $a = 0$ формула допустима только при положительном показателе.